Einführung in Operations Research

Lineare Optimierung (2)

Prof. Dr. Thomas Slawig

CAU Kiel
Institut für Informatik

Inhalt

Inhalt

Lernziele

- Die Idee des Simplex-Algorithmus erklären können.
- Den Simplex-Algorithmus am einfachen Beispiel durchführen können.
- Das Abbruchkriterium des Simplex-Algorithmus kennen.
- Mit der Phase 1 des Simplex-Algorithmus eine zulässige Basislösung berechnen können.

Inhalt

Inhalt

Standardform eines Linearen Optimierungsproblems

Definition

Für gegebene $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ heißt das Problem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \quad \text{bei} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} Ax & = & b \\ x & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Lineares Optimierungsproblem oder **Lineares Programm (LP)** in Standardform. (Engl.: *linear program*)

Begriffe und Bezeichnungen

- $x \mapsto c^\top x = \sum_{i=1}^n c_i x_i$ heißt **Kosten-** oder **Zielfunktion**
- $x \in \mathbb{R}^n$ ist die gesuchte Größe (Optimierungsparameter)
- $Ax = b$ sind **Gleichheitsnebenbedingungen**
- $x \geq 0$ sind **Ungleichheitsnebenbedingungen**

Inhalt

Basis

Definition (Basis)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Rang m und

$$\mathcal{B} \subset \{1, \dots, n\}, |\mathcal{B}| = m$$

eine Indexmenge. Sind die zugehörigen Spaltenvektoren

$$A_{*\mathcal{B}(1)}, \dots, A_{*\mathcal{B}(m)}$$

von A linear unabhängig, dann heißen sie **Basis**. Die aus der Basis gebildete Teilmatrix ist

$$B := \begin{bmatrix} | & & | \\ A_{*\mathcal{B}(1)} & \dots & A_{*\mathcal{B}(m)} \\ | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}.$$

Die Matrix $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ist regulär, also invertierbar.

Basislösung

Definition (Basislösung)

Für eine Basis B heißt eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$ mit

$$x_j = \left\{ \begin{array}{ll} x_{\mathcal{B}(i)}, & \text{falls } j = \mathcal{B}(i), \\ 0, & \text{sonst} \end{array} \right\}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

Basislösung. Gilt für mindestens eine Komponente $x_{\mathcal{B}(i)} = 0$, dann heißt die Basislösung **degeneriert/entartet**.

- Für eine Basislösung gilt $x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \in \mathbb{R}^m$.
- Der Begriff „Basis**lösung**“ bezieht sich **nur** auf die Lösung bzw. Gültigkeit der Gleichheitsnebenbedingung $Ax = b$.
- Eine Basislösung kann unzulässig sein ($x \not\geq 0$).
- Eine Basislösung ist im Allgemeinen noch nicht optimal.

Inhalt

Fundamentalsatz der LP

Satz (Fundamentalsatz der LP)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Rang m. Dann gilt:

- *Gibt es eine zulässige Lösung von $Ax = b$ (d. h. eine, die auch $x \geq 0$ erfüllt), dann gibt es eine zulässige Basislösung.*
- *Gibt es eine optimale zulässige Lösung, dann gibt es eine optimale zulässige Basislösung.*

Inhalt

Erlaubte Manipulationen der Gleichheitsnebenbedingungen

Folgende Operationen ändern nicht die zulässige Menge:

- Multiplikation einzelner Nebenbedingungen (d. h. einzelner Zeilen von A und der entsprechenden Komponente von b) mit $\theta \in \mathbb{R}, \theta \neq 0$:

$$A_{i1}x_1 + \ldots + A_{in}x_n = A_{i*}^\top x = b_i \quad \Longleftrightarrow \quad \theta A_{i1}x_1 + \ldots + \theta A_{in}x_n = \theta A_{i*}^\top x = \theta b_i.$$

- Addition und Subtraktion einer Nebenbedingung zu einer anderen:

$$\left.\begin{array}{r} A_{i*}^\top x = b_i \\ A_{j*}^\top x = b_j \end{array}\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rl} A_{i*}^\top x &= b_i \\ (A_{j*} \pm A_{j*})^\top x &= b_i \pm b_j \end{array}\right.$$

- Addition und Subtraktion des Vielfachen einer Nebenbedingung zu einer anderen:

$$\left.\begin{array}{r} A_{i*}^\top x = b_i \\ A_{j*}^\top x = b_j \end{array}\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rl} A_{i*}^\top x &= b_i \\ (A_{j*} \pm \theta A_{j*})^\top x &= b_i \pm \theta b_j \end{array}\right.$$

- Also: Operationen des Gauß-Algorithmus auf $[b, A]$ ändern nicht die zulässige Menge.

Berechnung einer Basislösung

- Annahme: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ habe Rang m.
- Basis (linear unabhängige Spalten) ausgewählt (Indizes in $\mathcal{B}$):

$$A = \begin{bmatrix} | & & | & & | & | \\ A_{*1} & \cdots & A_{*\mathcal{B}(1)} & \cdots & A_{*\mathcal{B}(m)} & A_{*n} \\ | & & | & & | & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

- Matrix der Basisspalten ist regulär (invertierbar):

$$B := \begin{bmatrix} | & & | \\ A_{*\mathcal{B}(1)} & \cdots & A_{*\mathcal{B}(m)} \\ | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

Berechnung einer Basislösung

- Transformiere Basisspalten zu Standardbasisvektoren $A_{*\mathcal{B}(i)} \to e_i$ (Gauß-Algorithmus):

$$A \to \tilde{A} = \begin{bmatrix} | & & | & & | & | \\ \tilde{A}_{*1} & \cdots & e_1 & \cdots & e_m & \tilde{A}_{*n} \\ | & & | & & | & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

- Entspricht Multiplikation mit B^{-1}, d. h. $\tilde{A} = B^{-1}A$.
- Für Basislösung setze $x_j = 0, j \notin \mathcal{B}$. Es folgt

$$\begin{aligned} Ax = b \iff B^{-1}Ax = B^{-1}b &\iff \tilde{A}x = B^{-1}b =: \tilde{b} \\ &\iff \tilde{A}x = \sum_{i=1}^{m} x_{\mathcal{B}(i)} e_i + \sum_{j \notin \mathcal{B}} x_j \tilde{A}_{*j} = x_{\mathcal{B}} = \tilde{b}. \end{aligned}$$

- Also: Transformiere $[b, A]$ mit Gauß so zu $[\tilde{b}, \tilde{A}]$, dass in den Basisspalten die Standardbasisvektoren stehen, dann ist x mit $x_{\mathcal{B}} = \tilde{b}$ Basislösung.

Beispiel

- Problem in Standardform:

$$\begin{aligned} \min\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_2 + x_3 + 4x_5 = 8, \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 6, \\ x \geq 0. \end{aligned}$$

- Tableau:

b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
8	2	1	1	1	0
8	0	2	1	0	4
6	0	0	1	3	1

  Ersten drei Spalten linear unabhängig.

- Gauß für erste Spalte:

- 1. Zeile durch 2 dividieren:

b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
4	1	0.5	0.5	0.5	0
8	0	2	1	0	4
6	0	0	1	3	1

- Gauß für zweite Spalte:

b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
4	1	0.5	0.5	0.5	0
4	0	1	0.5	0	2
6	0	0	1	3	1

  1. Zeile $-\,0.5 \times$ 2. Zeile:

b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	1	0	0.25	0.5	-1
4	0	1	0.5	0	2
6	0	0	1	3	1

Beispiel (Forts.)

- Gauß für zweite Spalte ergab:

b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	1	0	0.25	0.5	-1
4	0	1	0.5	0	2
6	0	0	1	3	1

- Gauß für dritte Spalte:
  1. Zeile $- 0.25 \times$ 3. Zeile:

b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0.5	1	0	0	-0.25	-1.25
4	0	1	0.5	0	2
6	0	0	1	3	1

- Forts. Gauß für dritte Spalte:
  2. Zeile $- 0.5 \times$ 3. Zeile:

b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0.5	1	0	0	-0.25	-1.25
1	0	1	0	-1.5	2
6	0	0	1	3	1

- Basislösung $x = (0.5, 1, 6, 0, 0)$, ist zulässig.

Zusammenfassung in Matrixschreibweise

- Sei B Basis, d.h. Matrix mit linear unabhängigen Spalten von A.
- Es seien dies die ersten m Spalten von A.
  Durch Umnummerierung der Unbekannten ist das immer möglich.
- Partitionierung von A, x, c als

$$A = [B, N], \quad x = \begin{bmatrix} x_{\mathcal{B}} \\ x_N \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_{\mathcal{B}} \\ c_N \end{bmatrix}.$$

  mit N Nichtbasisspalten, x_N Nichtbasisvariablen.
- Tableau nach Basiswahl vor Transformation:

$$\begin{array}{c|c} \hline b & A \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{c|cc} \hline b & B & N \end{array}$$

- Erzeuge Einheitsmatrix in den Basisspalten:

$$\to B^{-1}\cdot \quad \begin{array}{c|cc} \hline b & B & N \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{c|cc} \hline B^{-1}b & I & B^{-1}N \end{array}$$

Erweiterung des Tableaus um die Kostenfunktion

- $Ax = Bx_\mathcal{B} + Nx_N = b \Rightarrow x_\mathcal{B} = B^{-1}(b - Nx_N)$
- Kostenfunktion für *beliebige* Lösung x:

$$c^\top x = c_\mathcal{B}^\top x_\mathcal{B} + c_N^\top x_N = c_\mathcal{B}^\top B^{-1}(b - Nx_N) + c_N^\top x_N = c_\mathcal{B}^\top B^{-1} b + \left(c_N^\top - c_\mathcal{B}^\top B^{-1} N\right) x_N.$$

- ... für Basislösung ($x_N = 0$):

$$c^\top x = c_\mathcal{B}^\top B^{-1} b.$$

- Ergänze Tableau in oberster Zeile:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & c_\mathcal{B}^\top & c_N^\top \\ \hline b & B & N \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{c|cc} 0 & c_\mathcal{B}^\top & c_N^\top \\ \hline B^{-1}b & I & B^{-1}N \end{array}$$

- Erzeuge mit Gauß-Algorithmus Nullen in oberster Zeile über den Basisspalten:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & c_\mathcal{B}^\top & c_N^\top \\ \hline B^{-1}b & I & B^{-1}N \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{c|cc} -c_\mathcal{B}^\top B^{-1} b & c_\mathcal{B}^\top - c_\mathcal{B}^\top I = 0 & c_N^\top - c_\mathcal{B}^\top B^{-1} N \\ \hline B^{-1}b & I & B^{-1}N \end{array}$$

- Dann steht oben links $(-1) \cdot$ Wert der Kostenfunktion für die Basislösung.

Im Beispiel (s.o.)

- Problem in Standardform:

$$\min\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_5$$

$$\dots$$

- Endergebnis nach Transformation:

b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0.5	1	0	0	-0.25	-1.25
1	0	1	0	-1.5	2
6	0	0	1	3	1

- Basislösung $x = (0.5, 1, 6, 0, 0)$, ist zulässig.
- Kostenfunktionswert $c^\top x = 2 + 3 + 24 = 29$.

- Erweitere Tableau:

0	4	3	4	0	2
0.5	1	0	0	-0.25	-1.25
1	0	1	0	-1.5	2
6	0	0	1	3	1

- Erzeuge Nullen: 0. Zeile $-\,4\times$1. Zeile:

-2	0	3	4	1	7

- 0. Zeile $-\,3\times$2. Zeile:

-5	0	0	4	5.5	1

- 0. Zeile $-\,4\times$3. Zeile:

-29	0	0	0	-6.5	-3

Transformation von Basislösung zu Basislösung

- Sei x Basislösung mit Basisindizes $\mathcal{B}$.
- Weiter sei $[b, A]$ erweiterte Matrix, Basisspalten von A schon auf Standardbasisvektoren transformiert.
- Ziel: Übergang zu einer anderen Basislösung $x \to x'$ durch Austausch *einer* Basisspalte.
- Tausch eines Indizes $\mathcal{B}(\ell) \leftrightarrow j$, also: $\mathcal{B} \to \mathcal{B}' := \mathcal{B} \setminus \{\mathcal{B}(\ell)\} \cup \{j\}$.
- $j \notin \mathcal{B}$ und ℓ müssen geeignet gewählt werden (s.u.).
- Transformiere *eine* Nichtbasisspalte zu Standardbasisvektor: $A_{*j} \to e_\ell, j \notin \mathcal{B}$ (wieder mit Gauß-Algorithmus):

$$[b, A] = \begin{bmatrix} | & & | & & {\color{red}|} & \\ b & \cdots & A_{*j} & \cdots & {\color{red}e_\ell} & \cdots \\ | & & | & & {\color{red}|} & \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} | & & | & & {\color{red}|} & \\ b' & \cdots & e_\ell & \cdots & {\color{red}A'_{*\mathcal{B}(\ell)}} & \cdots \\ | & & | & & {\color{red}|} & \end{bmatrix} = [b', A'].$$

Transformation von Basislösung zu Basislösung

- Transformation einer Nichtbasisspalte zu Standardbasisvektor: $A_{*j} \to e_\ell, j \notin \mathcal{B}$ mit Gauß

$$[b, A] = \begin{bmatrix} | & & | & & | & \\ b & \cdots & A_{*j} & \cdots & e_\ell & \cdots \\ | & & | & & | & \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} | & & | & & | & \\ b' & \cdots & e_\ell & \cdots & A'_{*\mathcal{B}(\ell)} & \cdots \\ | & & | & & | & \end{bmatrix} = [b', A'].$$

- Das sind folgende Operationen: Zeile ℓ durch $A_{\ell j}$ dividieren:

$$A'_{\ell *} := \frac{A_{\ell *}}{A_{\ell j}}, \quad b'_\ell := \frac{b_\ell}{A_{\ell j}}.$$

  Jetzt ist $A'_{\ell j} = 1$.
- Nullen in der Spalte j (außer in $A'_{\ell j}$) erzeugen, d. h. entsprechendes Vielfaches von Zeile ℓ von den anderen Zeilen abziehen:

$$A'_{i*} := A'_{i*} - A_{ij} A'_{\ell *}, \quad b'_i := b_i - A_{ij} b'_\ell, \quad i \neq \ell.$$

Beispiel (s.o.)

- Nebenbedingungen waren:

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$$
$$2x_2 + x_3 + 4x_5 = 8,$$
$$x_3 + 3x_4 + x_5 = 6, x \geq 0.$$

- Endergebnis war:

b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0.5	1	0	0	-0.25	-1.25
1	0	1	0	-1.5	2
6	0	0	1	3	1

- Tausche $x_4 \leftrightarrow x_3$ als Basisvariable:

b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0.5	1	0	0	-0.25	-1.25
1	0	1	0	-1.5	2
2	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$

- Null in 1. Zeile erzeugen:
  1. Zeile + 0.25 × 3. Zeile:

b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	1	0	$\frac{1}{12}$	0	$-\frac{14}{12}$
1	0	1	0	-1.5	2
2	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$

- Null in 2. Zeile erzeugen:
  2. Zeile + 1.5 × 3. Zeile:

b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	1	0	$\frac{1}{12}$	0	$-\frac{14}{12}$
4	0	1	0.5	0	2.5
2	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$

- Neue Basislösung $x = (1, 4, 0, 2, 0)$, ist wieder zulässig.

Neuer Kostenfunktionswert

- Nach dem Basiswechsel haben wir – wenn wir uns die Basispalten wieder links vorne denken und die Basivariablen entsprechend umnummeriert – wieder die Form

$$\begin{array}{c|cc} \hline B^{-1}b & \color{red}{I} & B^{-1}N \end{array}$$

jetzt mit anderen Matrizen B (da andere Basis) und N (da andere Nichtbasisvariablen).

- Auch mit der neuen Basis gilt für die neue Basislösung ($x_N = 0$):

$$c^\top x = c_\mathcal{B}^\top \color{red}{x_\mathcal{B}} + c_N^\top x_N = c_\mathcal{B}^\top \color{red}{B^{-1}b}.$$

- Erzeuge wieder mit Gauß-Algorithmus eine Null in oberster Zeile über der neuen Basisspalte (andere sind schon Null). Dann haben wir insgesamt folgende Transformation durchgeführt:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & c_\mathcal{B}^\top & c_N^\top \\ \hline b & A & N \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc} 0 & \color{cyan}{c_\mathcal{B}^\top} & c_N^\top \\ \hline B^{-1}b & I & B^{-1}N \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc} -c_\mathcal{B}^\top \color{blue}{B^{-1}b} & c_\mathcal{B}^\top - c_\mathcal{B}^\top \color{blue}{I} = \color{cyan}{0} & c_N^\top - c_\mathcal{B}^\top \color{blue}{B^{-1}N} \\ \hline \color{blue}{B^{-1}b} & \color{blue}{I} & \color{blue}{B^{-1}N} \end{array}$$

- Oben links steht wieder $(-1) \cdot$ Wert der Kostenfunktion, jetzt für die neue Basislösung.

Beispiel (s.o.)

- Kostenfunktion:

$$c^\top x = 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_5$$

- Erweitertes Tableau vor Basiswechsel:

-29	0	0	0	-6.5	-3
0.5	1	0	0	-0.25	-1.25
1	0	1	0	-1.5	2
6	0	0	1	3	1

- Unterer Teil verändert nach Basiswechsel:

-29	0	0	0	-6.5	-3
1	1	0	$\frac{1}{12}$	0	$-\frac{14}{12}$
4	0	1	0.5	0	2.5
2	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$

- Neue Basislösung war $x = (1, 4, 0, 2, 0)$.
- Erzeuge Null über neuer Basisspalte: oberste Zeile $+6.5 \times$ 3. Zeile:

-16	0	0	$\frac{13}{6}$	0	$-\frac{5}{6}$
1	1	0	$\frac{1}{12}$	0	$-\frac{14}{12}$
4	0	1	0.5	0	2.5
2	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$

- Kostenfunktionswert für neue Basislösung: $c^\top x = 16$.
- Kostenfunktion wurde also schon reduziert.
- Zufall? Nein, geschickte Wahl der neuen Basivariablen ...

Welche Variable x_j soll neu in die Basis?

- Wenn wir die Basispalten zur Einheitsmatrix transformiert haben ...
- ... und in der obersten Zeile entsprechend Nullen erzeugt haben, erhalten wir das Tableau:

$$
\begin{array}{c|cc}
-c_{\mathcal{B}}^\top B^{-1} b & 0 & c_N^\top - c_{\mathcal{B}}^\top B^{-1} N \\ \hline
B^{-1} b & I & B^{-1} N
\end{array}
$$

- Für *jede beliebige* Lösung von $Ax = Bx_{\mathcal{B}} + Nx_N = b$ gilt $x_{\mathcal{B}} = B^{-1}(b - Nx_N)$ ...
- ... und für die Kostenfunktion:

$$
c^\top x = c_{\mathcal{B}}^\top x_{\mathcal{B}} + c_N^\top x_N = c_{\mathcal{B}}^\top B^{-1}(b - Nx_N) + c_N^\top x_N = c_{\mathcal{B}}^\top B^{-1} b + \underbrace{\left(c_N^\top - c_{\mathcal{B}}^\top B^{-1} N\right) x_N}_{=0,\text{ wenn } x \text{ Basislösung}}.
$$

- Die Werte in der obersten Spalte über den Nichtbasisvariablen geben an, wie sich die Kostenfunktion ändert, wenn Nichtbasisvariablen x_N in die Basis aufgenommen werden und Werte $\neq 0$ erhalten.

Welche Variable x_j soll neu in die Basis?

- Die Werte in der obersten Spalte über den Nichtbasisvariablen

$$(c_N^\top - c_{\mathcal{B}}^\top B^{-1} N)_j =: \bar{c}_j, \quad j \notin \mathcal{B},$$

geben an, wie sich die Kostenfunktion ändert, wenn Nichtbasisvariablen x_N in die Basis aufgenommen werden.

$$\begin{array}{c|cc} -c_{\mathcal{B}}^\top B^{-1} b & 0 & c_N^\top - c_{\mathcal{B}}^\top B^{-1} N \in \mathbb{R}^{n-m} \\ \hline B^{-1} b & I & B^{-1} N \end{array}$$

- Wähle also ein j mit $\bar{c}_j < 0$.
- Idee: Wähle j mit kleinstem $\bar{c}_j < 0$ (größte Reduktion der Kostenfunktion).
- Günstig auch: Wähle kleinsten (ersten) Index j mit $\bar{c}_j < 0$. (Damit können Probleme des Algorithmus – kommt später – vermieden werden).

Im Beispiel (s.o.)

- ... hatten wir das schon so gemacht: Tableau vor Basistransformation:

-29	0	0	0	-6.5	-3
0.5	1	0	0	-0.25	-1.25
1	0	1	0	-1.5	2
6	0	0	1	3	1

- Als neue Basisvariable wurde x_4 gewählt (entspricht beiden Regeln oben).
- Deswegen ergab sich damit eine Reduktion der Kostenfunktion.
- Nach der Basistransformation lautete das Tableau:

-16	0	0	$\frac{13}{6}$	0	$-\frac{5}{6}$
1	1	0	$\frac{1}{12}$	0	$-\frac{14}{12}$
4	0	1	0.5	0	2.5
2	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$

- Weiterer Tausch sinnvoll: Nehme x_5 als Basisvariable hinzu ($\bar{c}_5 < 0$).
- Wenn kein $\bar{c}_j < 0$ existiert, ist keine Kostenreduktion mehr möglich: Abbruch.

Gegen welche Basisvariable $x_{\mathcal{B}(\ell)}$ soll getauscht werden?

- Neue Basislösung soll zulässig sein ($x \geq 0$), wenn die alte zulässig war.
- Betrachte noch einmal die Transformation der Nichtbasisspalte zu Standardbasisvektor:

$$[b, A] \to [b', A'].$$

- Alte Basislösung steht in b, neue am Ende des Transformationsschrittes in b'.
- Transformation von $b \geq 0$ erfolgte mit Gauß-Algorithmus nach den Formeln (s.o.):

$$b'_\ell := \frac{b_\ell}{A_{\ell j}}, \quad b'_i := b_i - A_{ij} b'_\ell = b_i - A_{ij} \frac{b_\ell}{A_{\ell j}}, \; i \neq \ell.$$

- Um sicherzustellen, dass $b' \geq 0$ gilt, wählen wir ℓ so, dass:

$$A_{\ell j} > 0 \Rightarrow b'_\ell \geq 0,$$

$$\frac{b_\ell}{A_{\ell j}} = \min \left\{ \frac{b_i}{A_{ij}} : A_{ij} > 0 \right\} \Rightarrow b'_i = b_i - A_{ij} \frac{b_\ell}{A_{\ell j}} \geq \begin{cases} b_i \geq 0, & \text{wenn } A_{ij} \leq 0, \\ b_i - A_{ij} \dfrac{b_i}{A_{ij}} = 0, & \text{wenn } A_{ij} > 0. \end{cases}$$

Im Beispiel oben ...

- Nach Transformation der Bassispalten auf Standardbasisvektoren:

-29	0	0	0	-6.5	-3
0.5	1	0	0	-0.25	-1.25
1	0	1	0	-1.5	2
6	0	0	1	3	1

- Wir hatten $x_4 \leftrightarrow x_3$ getauscht:
- $j = 4$ wegen Kostenreduktion
- $\ell = 3$ weil $A_{34} > 0$ als einziges in der Spalte nach der Regel:

$$A_{\ell j} > 0, \frac{b_\ell}{A_{\ell j}} = \min\left\{\frac{b_i}{A_{ij}} : A_{ij} > 0\right\}$$

- Nach Basistransformation hatten wir:

-16	0	0	$\frac{13}{6}$	0	$-\frac{5}{6}$
1	1	0	$\frac{1}{12}$	0	$-\frac{14}{12}$
4	0	1	0.5	0	2.5
2	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$

- Weiterer Tausch sinnvoll: $j = 5, \bar{c}_5 < 0$.
- Kandidaten $\ell \in \{2, 3\}$ weil $A_{25}, A_{35} > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{b_\ell}{A_{\ell j}} &= \min\left\{\frac{b_i}{A_{ij}} : A_{ij} > 0\right\} \\ &= \min\left\{\frac{b_2}{A_{25}}, \frac{b_3}{A_{35}}\right\} = \frac{b_2}{A_{25}} \end{aligned}$$

- Wähle $\ell = 2$.

Inhalt

Zusammenfassung: Simplex-Algorithmus

Input:

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, m < n$, Rang $A = m, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$.
- Basisindizes $\mathcal{B}$, zu denen es zulässige Basislösung gibt. (wie stellen wir das sicher? s. u.)

Algorithmus:

1. Erzeuge Standardbasisvektoren in den Basisspalten und Nullen in der obersten Zeile über den Basisspalten mit Gauß:

$$\begin{array}{c|c} 0 & c^\top \\ \hline b & A \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|c} \bar{c}_0 & \bar{c}^\top \\ \hline b' & A' \end{array}$$

2. Wähle $j \notin \mathcal{B}$ mit $\bar{c}_j < 0$, wenn keines existiert: Abbruch.
3. Bestimme ℓ, so dass

$$\frac{b_\ell}{A_{\ell j}} = \min \left\{ \frac{b_i}{A_{ij}} : A_{ij} > 0 \right\}, \text{ wenn keines existiert: Abbruch.}$$

4. Tausche Basisvariable $\mathcal{B}(\ell) \leftrightarrow j$ und gehe zu 1.

Inhalt

Konstruktion einer zulässigen Basislösung (Phase 1 des Simplex-Verfahrens)

- Bringe LP, ggfs. durch Multiplikation einzelner Zeilen von A mit (-1), auf die Form

$$Ax = b, x \geq 0 \text{ mit } b \geq 0. \tag{1}$$

- Betrachte Hilfsproblem

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+m}} \sum_{i=1}^{m} y_i, \quad \text{bei} \quad Ax + y = b, x \geq 0, y \geq 0. \tag{2}$$

- Hat (1) eine Lösung, dann hat (2) die Lösung $y = 0$ mit Kostenfunktionswert 0.
- Wegen $Ax + y = [A, I] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b$ ist $(x, y) = (0, b)$ zulässige Basislösung von (2).
- Simplex-Algorithmus für (2) erzeugt Folge zulässiger Basislösungen

Konstruktion einer zulässigen Basislösung (Forts.)

- Fall 1: Endergebnis $\sum_{i=1}^{m} y_i = 0 :\Rightarrow y = 0 \Rightarrow Ax = b$.
- Fall 1a: kein y_j ist Basisvariable: $\Rightarrow x$ zulässige Basislösung von (1)
- Fall 1b: $y_j = 0$ Basisvariable: Ergebnis des Simplex ist degenerierte Basislösung, $\Rightarrow y_j$ kann gegen Nichtbasisvariable $x_i = 0$ getauscht werden, ohne Wirkung auf $Ax = b$
- Fall 2: $\sum_{i=1}^{m} y_i \neq 0 :\Rightarrow y \neq 0 \Rightarrow$

$$Ax = b, x \geq 0 \text{ mit } b \geq 0 \tag{1}$$

hat keine Lösung, d. h. zulässige Menge des ursprünglichen Problems ist leer.

Beispiel

- Finde zulässige Basislösung zu

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$
$$3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \quad x \geq 0.$$

- Tableau: *Basivariable

b	x_1	x_2	x_3	y_1^*	y_2^*
0	0	0	0	1	1
4	2	1	2	1	0
3	3	3	1	0	1

- erzeuge Nullen:

b	x_1	x_2	x_3	y_1^*	y_2^*
-7	-5	-4	-3	0	0
4	2	1	2	1	0
3	3	3	1	0	1

- wähle Spalte mit kleinsten (neg.) Kosten, erzeuge Einheitsvektor:

b	x_1^*	x_2	x_3	y_1^*	y_2
-2	0	1	-4/3	0	5/3
2	0	-1	4/3	1	-2/3
1	1	1	1/3	0	1/3

- noch einmal:

b	x_1^*	x_2	x_3^*	y_1	y_2
0	0	0	0	1	1
3/2	0	-3/4	1	3/4	-1/2
1/2	1	5/4	0	-1/4	1/2

- Kostenfunktionswert $= 0$
- y_1, y_2 nicht in Basis
- zulässige Basislösung: $x = (1/2, 0, 3/2)$.

Lernziele

- Die Idee des Simplex-Algorithmus erklären können.
- Den Simplex-Algorithmus am einfachen Beispiel durchführen können.
- Das Abbruchkriterium des Simplex-Algorithmus kennen.
- Mit der Phase 1 des Simplex-Algorithmus eine zulässige Basislösung berechnen können.